ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x,\ x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Α.2 ΄ηστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 + z_2|.$$

Μονάδες 2

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_o)\,g'(x_o) - f'(x_o)\,g(x_o)}{[g(x_o)]^2}.$$

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\left[\ell n|x|\right]' = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 2

δ. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

Μονάδες 2

ε. ΄ηστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{1}{f(x)}dx$.

Μονάδες 9

γ. Για κάθε $x<0$ να αποδείξετε ότι:

$$f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x) .$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

΄ηστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x=2$.

Μονάδες 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_o=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x=\frac{3}{5}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ell n(x+1)-(x+1)\ell nx$ με $x>0$.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι: $\ell n(x+1)-\ell nx<\frac{1}{x}$, $x>0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ell n(1+\frac{1}{x})$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha\in(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ *(για τους εξεταζομένους)*

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ